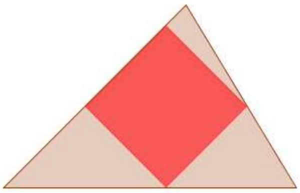
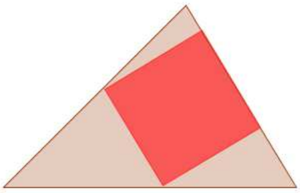
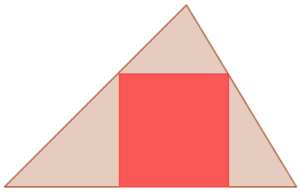
Additum zu 2.2. (Strahlensätze): **Einbeschreibungsaufgaben**

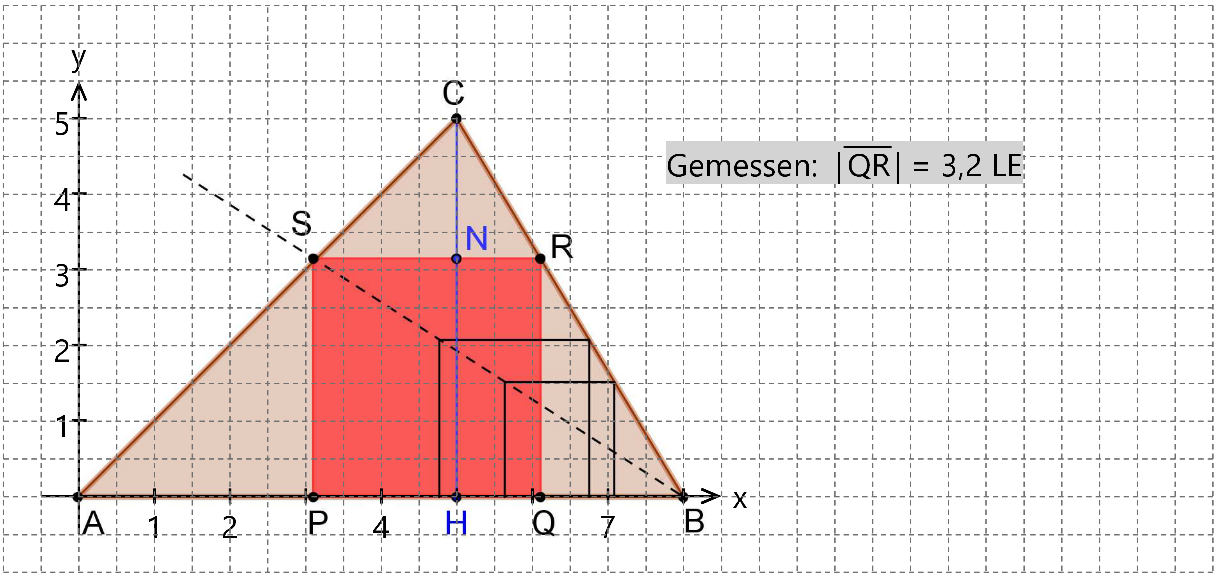
→ klassische Einbeschreibungsaufgaben, vor allem die rechnerische Ermittlung der Seitenlängen/Koordinaten der einbeschriebenen Figur

❶ Einem Dreieck soll ein Quadrat einbeschrieben werden. Das bedeutet, dass alle vier Eckpunkte des Quadrats auf den Seiten des Dreiecks liegen. Das kann zum Beispiel so aussehen:

 oder so:  oder so: 

Im Folgenden soll dem Dreieck ABC mit A(0|0), B(8|0) und C(5|5) das Quadrat PQRS einbeschrieben werden, wobei die Seite $\overline{PQ}$ des Quadrats auf der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks liegen soll, der Punkt R auf der Seite $\overline{BC}$ und der Punkt S auf $\overline{AC}$.

a) Zeichne das Dreieck ABC und konstruiere das Quadrat PQRS hinein. Wie lang ist eine Seite dieses Quadrats (abmessen)?



b) Zeichne den Hilfspunkt H(5|0) und die Höhe $\overline{HC}$ in das Dreieck ein.
Berechne mithilfe des Strahlensatzes die Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrats. Runde das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma und vergleiche es mit deiner Messung aus Teilaufgabe a).

$$\frac{|\overline{CH}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{CN}|}{|\overline{SR}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{8} = \frac{5-x}{x}$$

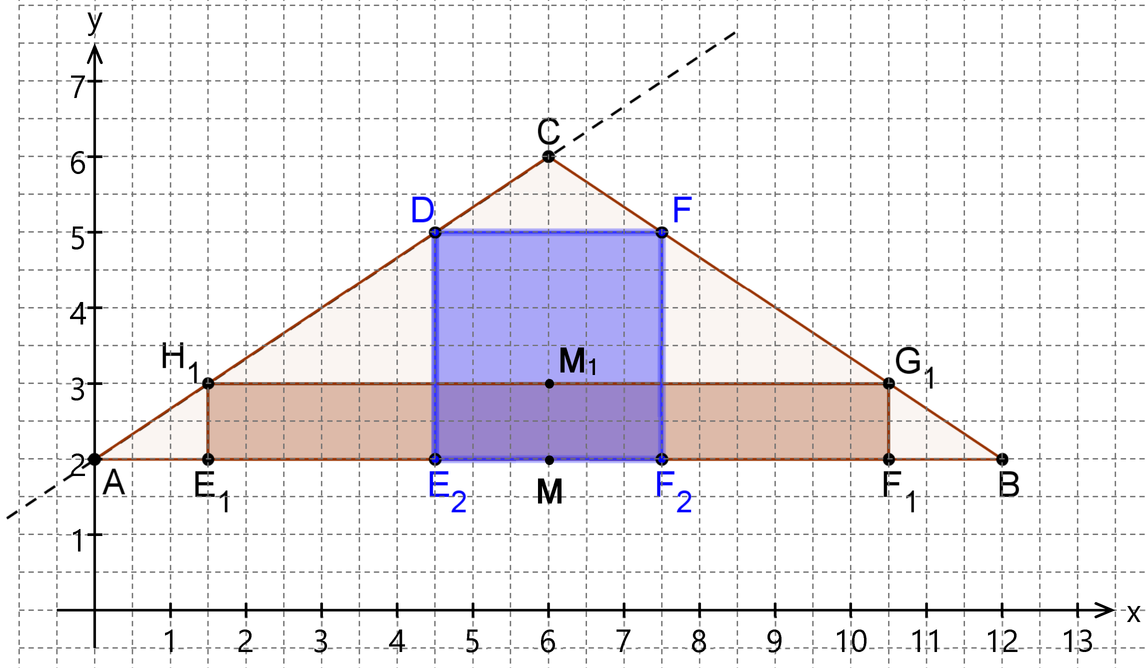
$\Leftrightarrow \quad 5x = 8 \cdot (5 - x) \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 40 - 8x \quad \Leftrightarrow \quad 13x = 40 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3{,}08$

Also: $|\overline{PQ}| = |\overline{QR}| = 3{,}08$ LE

❷ Dem gleichschenkligen Dreieck ABC mit seinen Eckpunkten A(0|2), B(12|2) und C(6|6) sind Rechtecke $E_nF_nG_nH_n$ einzubeschreiben, für die gilt:

$\overline{E_nF_n} \subset \overline{AB}$, $G_n \in \overline{BC}$ und $H_n \in \overline{AC}$.

a) Zeichne das Dreieck ABC. Beschreibe ihm das Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ mit $|\overline{E_1H_1}| = 1$ cm ein und berechne mithilfe des Strahlensatzes die Länge der Strecke $\overline{G_1H_1}$.



Sei M der Mittelpunkt von $|\overline{AB}| \Rightarrow M(6|2)$

$|\overline{CM}| = 4$ cm $\quad (y_C - y_M = 6 - 2 = 4)$

$|\overline{AM}| = AB : 2 = 6$ cm

M_1 soll der Mittelpunkt von $\overline{H_1G_1}$ sein.

$$\frac{|\overline{CM}|}{|\overline{MA}|} = \frac{|\overline{CM_1}|}{|\overline{M_1H_1}|} \Leftrightarrow \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{(4-1)\text{ cm}}{M_1H_1} \Leftrightarrow 4\text{ cm} \cdot |\overline{M_1H_1}| = 6\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \Leftrightarrow |\overline{M_1H_1}| = 4{,}5\text{ cm}$$

b) Die Variable $x \in \mathbb{R}$ sei die Abszisse (der „x-Wert") der Punkte H_n. Zeige, dass für die Ordinate (den „y-Wert") der Punkte H_n gilt: $y = \frac{2}{3}x + 2$

☞ *Tipp*: Bedenke, dass die Punkte H_n auf einer Geraden durch A und C „wandern".

Geradengleichung AC: $\quad y = mx + t$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6-2}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Da $A(0|2) \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow$ AC: $y = \frac{2}{3}x + 2 \quad$ und somit: $\quad H_n(x|\frac{2}{3}x + 2)$

c) Stelle den Flächeninhalt der Rechtecke $E_nF_nG_nH_n$ in Abhängigkeit von x dar.
[Ergebnis: $A(x) = (8x - \frac{4}{3}x^2)$ FE]

$A_{E_nF_nG_nH_n} = |\overline{E_nF_n}| \cdot |\overline{F_nG_n}|$

$y_{H_n} - y_A$

$|\overline{E_nF_n}| = (12 - x - x)$ LE

$|\overline{F_nG_n}| = ((\underbrace{\tfrac{2}{3}x + 2}_{y_{H_n}}) - \underbrace{2}_{y_A})$ LE

$\Rightarrow A(x) = ((12 - 2x) \cdot \frac{2}{3}x)$ FE

$= (8x - \frac{4}{3}x^2)$ FE

d) Berechne, für welche Belegung von $x \in \mathbb{R}$ der Flächeninhalt der Rechtecke $E_nF_nG_nH_n$ maximal ist und gib den dazu gehörigen Flächeninhalt an.

$$\begin{aligned} A(x) &= 8x - \tfrac{4}{3}x^2 \\ &= -\tfrac{4}{3}x^2 + 8x \\ &= -\tfrac{4}{3}[x^2 - 6x] \\ &= -\tfrac{4}{3}[x^2 - 6x + 3^3 - 3^3] \\ &= -\tfrac{4}{3}[(x-3)^2 - 9] \\ &= -\tfrac{4}{3}(x-3)^2 + 12 \end{aligned}$$

$A(x) = 12$ (FE) für $x = 3$

Für x = 3 erhält man das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt: Es hat einen Flächeninhalt von 12 FE.

e) Ermittle zeichnerisch, für welches $x \in \mathbb{R}$ ein Quadrat entsteht. Zeichne dieses in die Zeichnung aus Teilaufgabe a) ein und benenne es mit $E_2F_2G_2H_2$.
Zeige anschließend rechnerisch, dass dieses Quadrat $E_2F_2G_2H_2$ <u>nicht</u> das Viereck mit dem größten Flächeninhalt ist.

Für $x = 4{,}5$ ist $E_2F_2G_2H_2$ ein Quadrat. Folglich ist eine Seite dieses Quadrats $(12 - 4{,}5 - 4{,}5)$ LE = 3 LE lang. Damit hat es einen Flächeninhalt von 3 LE · 3 LE = 9 FE. Das flächengrößte Rechteck ist aber das aus Teilaufgabe d), es hat nämlich einen Flächeninhalt von 12 FE. Das Quadrat hat also den kleineren Flächeninhalt.

Lösungen: d) für $x = 3$ ist $A_{max} = 12$ FE   e) für $x = 4{,}5$ ist $E_2F_2G_2H_2$ ein Quadrat und $A_{E_2F_2G_2H_2} = 9$ FE