3.14 Quadratisches Ergänzen – ALTERNATIVE

→ Bestimmen der Extremwerte durch quadratische Ergänzung mit vorherigem Ausklammern

❶ Bestimme mit Hilfe der quadratischen Ergänzung T_{max} bzw. T_{min} der folgenden Terme.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= 2x^2 - 12x + 14 \\
&= 2 \cdot [\, x^2 - 6x] + 14 \\
&= 2 \cdot [\, \underbrace{x^2 - 6x + \mathbf{3^2}} - \mathbf{3^2}] + 14 \\
&= 2 \cdot [\, (x - 3)^2 \quad - 9\,] + 14 \\
&= 2 \cdot (x - 3)^2 \quad - 18 \; + 14 \\
&= 2 \cdot (x - 3)^2 - 4
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow T_{min} = -4$ für $x = 3$

Hier wie versprochen die Lösungen für S. 56 und 57 für Lehrkräfte und Schüler/innen, die die Variante bevorzugen, bei der die eckige Klammer direkt nach dem „einfachen x" geschlossen wird.
In der gedruckten Variante wird der Koeffizient von x^2 immer komplett ausgeklammert.

$$
\begin{aligned}
T(x) &= 2x^2 - 12x + 14 \\
&= 2[x^2 - 6x + 7] \\
&= 2[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 7]
\end{aligned}
$$

a) $T(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$$
\begin{aligned}
&= 3[x^2 - 2x] + 9 \\
&= 3[\underbrace{x^2 - 2x + \mathbf{1^2}} - \mathbf{1^2}] + 9 \\
&= 3[(x - 1)^2 - 1] + 9 \\
&= 3(x - 1)^2 - 3 + 9 \\
&= 3(x - 1)^2 + 6
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow T_{min} = 6$ für $x = 1$

c) $T(x) = -2x^2 + 12x - 8$

$$
\begin{aligned}
&= -2[x^2 - 6x] - 8 \\
&= -2[\underbrace{x^2 - 6x + \mathbf{3^2}} - \mathbf{3^2}] - 8 \\
&= -2[(x - 3)^2 - 9] - 8 \\
&= -2(x - 3)^2 + 18 - 8 \\
&= -2(x - 3)^2 + 10
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow T_{max} = 10$ für $x = 3$

b) $T(x) = 2x^2 + 4x - 3$

$$
\begin{aligned}
&= 2[x^2 + 2x] - 3 \\
&= 2[\underbrace{x^2 + 2x + \mathbf{1^2}} - \mathbf{1^2}] - 3 \\
&= 2[(x + 1)^2 - 1] - 3 \\
&= 2(x + 1)^2 - 2 - 3 \\
&= 2(x + 1)^2 - 5
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow T_{min} = -5$ für $x = -1$

d) $T(x) = -3x^2 - 12x + 6$

$$
\begin{aligned}
&= -3[x^2 + 4x] + 6 \\
&= -3[\underbrace{x^2 + 4x + \mathbf{2^2}} - \mathbf{2^2}] + 6 \\
&= -3[(x + 2)^2 - 4] + 6 \\
&= -3(x + 2)^2 + 12 + 6 \\
&= -3(x + 2)^2 + 18
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow T_{max} = 18$ für $x = -2$

Lösungen (ohne Angabe von Min/Max):

$T(x) = 3(x - 1)^2 + 6$ • $T(x) = 2(x + 1)^2 - 5$ • $T(x) = -2(x - 3)^2 + 10$ • $T(x) = -3(x + 2)^2 + 18$

❷ Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist der Termwert am größten bzw. kleinsten?

a) $T(x) = -2x^2 + 6x - 0{,}5$

$= -2[x^2 - 3x] - 0{,}5$

$= -2[x^2 - 3x \mathbf{+ 1{,}5^2 - 1{,}5^2}] - 0{,}5$

$= -2[(x - 1{,}5)^2 - 2{,}25] - 0{,}5$

$= -2(x - 1{,}5)^2 + 4{,}5 - 0{,}5$

$= -2(x - 1{,}5)^2 + 4$

$\Rightarrow T_{max} = 4$ für $x = 1{,}5$

b) $T(x) = -2x^2 + 8x$

$= -2[x^2 - 4x]$

$= -2[x^2 - 4x \mathbf{+ 2^2 - 2^2}]$

$= -2[(x - 2)^2 - 4]$

$= -2(x - 2)^2 + 8$

$\Rightarrow T_{max} = 8$ für $x = 2$

c) $T(x) = -x^2 - 5x - 4{,}25$

$= -[x^2 + 5x] - 4{,}25$

$= -[x^2 + 5x \mathbf{+ 2{,}5^2 - 2{,}5^2}] - 4{,}25$

$= -[(x + 2{,}5)^2 - 6{,}25] - 4{,}25$

$= -(x + 2{,}5)^2 + 6{,}25 - 4{,}25$

$= -(x + 2{,}5)^2 + 2$

$\Rightarrow T_{max} = 2$ für $x = -2{,}5$

d) $T(x) = 0{,}5x^2 - 10x + 57$

$= 0{,}5[x^2 - 20x] + 57$

$= 0{,}5[x^2 - 20x \mathbf{+ 10^2 - 10^2}] + 57$

$= 0{,}5[(x - 10)^2 - 100] + 57$

$= 0{,}5(x - 10)^2 - 50 + 57$

$= 0{,}5(x - 10)^2 + 7$

$\Rightarrow T_{min} = 7$ für $x = 10$

Du willst noch mehr Aufgaben dieser Art? Kriegst du! ➛ S.

$T(x) = -2(x - 1{,}5)^2 + 4$ • $T(x) = -2(x - 2)^2 + 8$ • $T(x) = -(x + 2{,}5)^2 + 2$ • $T(x) = 0{,}5(x - 10)^2 + 7$

Lösungen (ohne Angabe von Min/Max):