Inhaltsverzeichnis

... INHALTSVERZEICHNIS

M10 Lernbereich 4: Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Seite

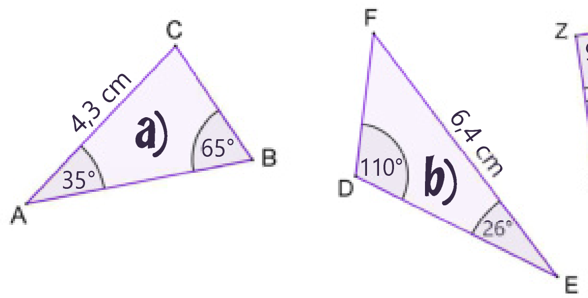
M10 Lernbereich 5: Daten und Zufall

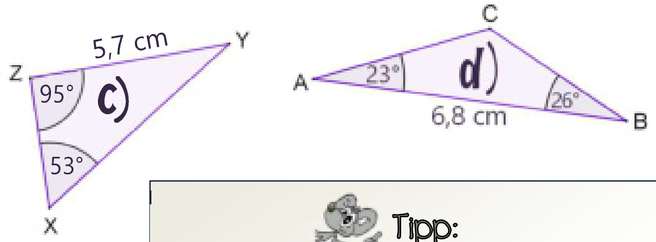
Seite

1.6 Der Sinussatz

→ typische Aufgaben zur Ermittlung fehlender Winkelmaße/Streckenlängen in (nicht-rechtwinkligen) Dreiecken, passende „Abschlussprüfungsschnipsel“ dazu

❶ Ermitteln Sie die fehlenden Seitenlängen folgender Dreiecke. Runden Sie jeweils auf eine Stelle nach dem Komma.





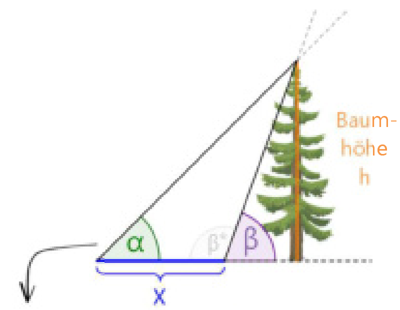
Tipp:

Schreibe beim Sinussatz die gesuchte Größe gleich immer „links oben“ hin (= in den Zähler), das erleichtert das Auflösen der Gleichung enorm.

$$\frac{a}{\sin 35°} = \frac{4{,}3\text{ cm}}{\sin 65°}$$

Lösungen (alle Angaben in cm): 2,7 • 3,0 • 3,5 • 3,8 • 3,9 • 4,7 • 4,7 • 7,1

❷ Ermitteln Sie die Höhe h des Baumes, wenn gilt: $\alpha = 45°$, $\beta = 70°$, $x = 30$ m. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.



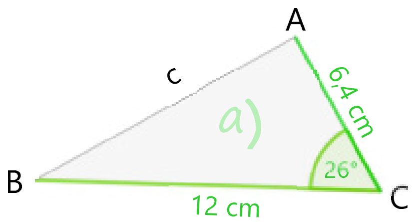
Wie misst man solche Winkel? → siehe S. 16

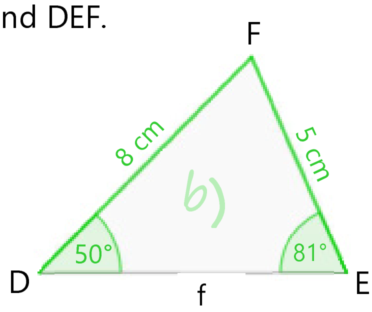
Lösung: siebenundvierzigkommazwei

1.8 Flächeninhalt beliebiger Dreiecke mithilfe des Sinus

→ Berechnen des Flächeninhalts in beliebigen Dreiecken mithilfe des Sinus; Wiederholung: Sinussatz und Kosinussatz

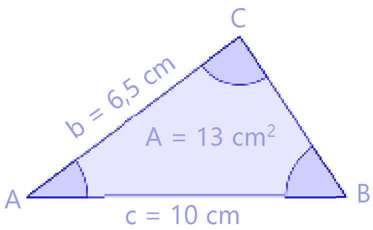
❶ Berechnen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und DEF.
Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.



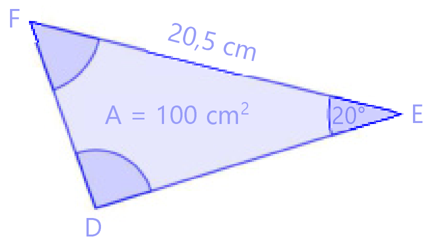


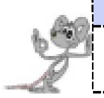
❷ Berechnen Sie alle fehlenden Innenwinkelmaße und Seitenlängen auf eine Nachkommastelle gerundet. Markieren Sie dann in der Tabelle mit den Maßzahlen den zugehörigen Buchstaben farbig. Zum Schluss ergibt sich (von links nach rechts gelesen) ein Lösungswort.

a)



b)





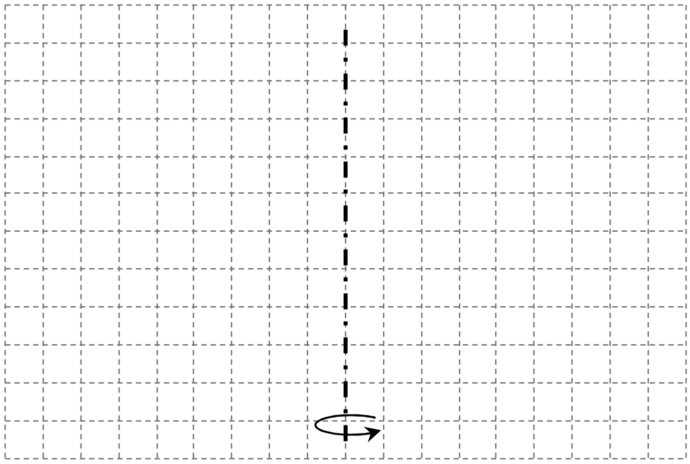
49,6	28,5	7,5	11,6	23,6	10,2	32,8	57,2	2,1	102,8	4,8	123,6	90,2
S	R	O	A	D	N	T	K	E	A	N	D	E

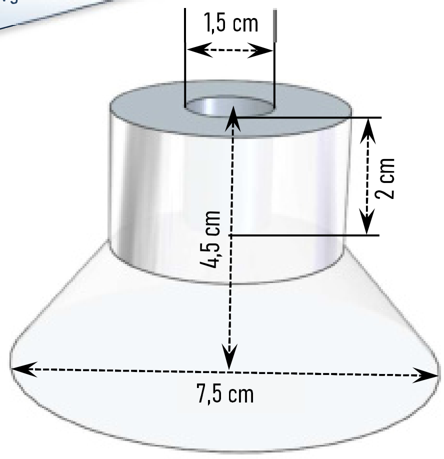
Lass dich nicht verunsichern:
Manchmal gibt es mehrere Lösungswege, so dass deine Lösungen um eine Nachkommastelle abweichen kann.

❷ Gegeben ist ein räumlicher Körper. Zeichnen Sie jeweils den dazugehörigen Axialschnitt.

a) Zeichnen Sie den Axialschnitt im Maßstab 1 : 1.

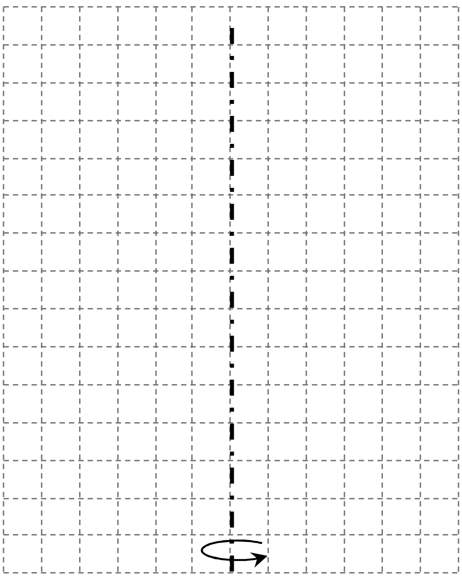
vgl. AP 2015 NT A 3

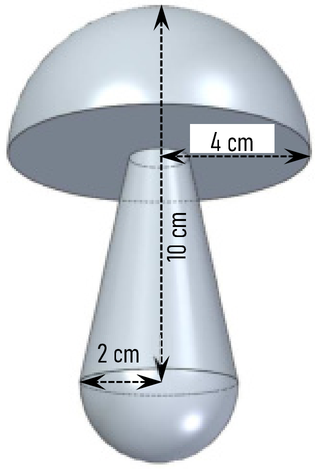




b) Zeichnen Sie den Axialschnitt im Maßstab 1 : 2 .

vgl. AP 2016 NT A 3





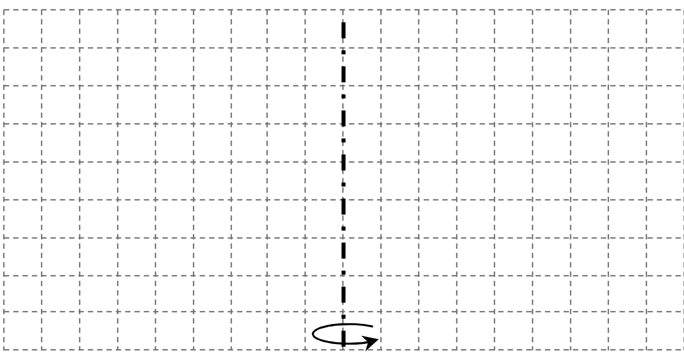
Diese Rotationskörper entstammen früheren Abschlussprüfungen.

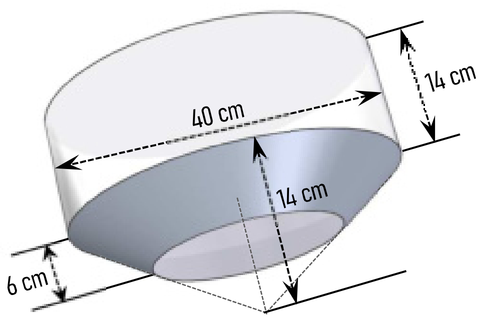
Die Aufgabenstellung wurde jedoch passend zum neuen LehrplanPLUS abgeändert.

Zeichnen und Skizzieren von Axialschnitten wird nun explizit gefordert.

c) Zeichnen Sie den Axialschnitt im Maßstab 1 : 10.

vgl. AP 2014 A 1

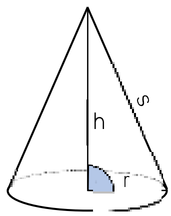




2.6 Kegel: Oberflächeninhalt und Volumen

→ *Oberflächeninhalt und Volumen (bzw. fehlende Werte) des Kreiskegels berechnen*

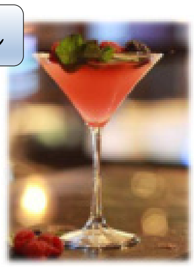
❶ Berechnen Sie die Oberflächeninhalte und Volumen des geraden Kreiskegels:
$h = 1$ cm, $s = \sqrt{2}$ cm



Lösungen: 1,05 cm³ • 7,58 cm²

❷ Ein klassisches Martiniglas fasst eine Füllmenge von 20 cl und hat einen Durchmesser von 11 cm. Berechnen Sie die Höhe sowie die Mantelfläche des Kreiskegels.

1 cl = 10 ml



6,31 cm • 144,52 cm²

❸ Vervollständigen Sie die Formeln zu Berechnungen am Kreiskegel und ermittle damit die fehlenden Größen in der Tabelle. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. Alle Werte sind in cm (bzw. cm² und cm³) angegeben.

$M = r \cdot \text{.........} \cdot s$

$\alpha = \frac{r}{s} \cdot \text{..............}$

$O = \text{.......}\pi + M$

$V = \frac{1}{3} r^2 \text{.............}$

Mittelpunktswinkel der Mantelfläche

	r	h	s	α	M	O	V
a)	10				338,35		
b)			9	50°			
c)		7					500

Lösungen: 14,58 • 8,26 • 8,91 • 10,77 • 10,83 • 1,25 • 274,57 • 35,34 • 281,03 • 652,51 • 40,25 • 4 • 495,37 • 418,88 • 334,26

2.7 Kugel: Oberflächeninhalt und Volumen

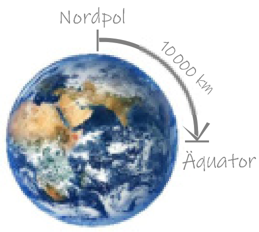
→ *Oberflächeninhalt und Volumen (bzw. fehlende Werte) der Kugel berechnen*

❶ In der Tabelle sind jeweils verschiedene Angaben über einen Tischtennisball, eine Billardkugel, einen Fußball und über einen Basketball gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Werte. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. Welcher Ball gehört zu welcher Aufgabe?

	r	d	O	V
a)	1,1 dm			
b)		5,72 cm		
c)			50,27 cm^2	
d)				36π dm^3

Lösungen: 2,86 cm • 2 cm • 3 dm • 33,51 cm^3 • 4 cm • 6 dm • 15,21 dm^2
102,79 cm^2 • 113,10 dm^2 • 5,58 dm^3 • 97,99 cm^3 • 2,2 dm

❷ Wissenschaftler definierten den Meter so, dass es vom Nordpol bis zum Äquator genau 10 000 km sind. Demnach beträgt der Erdumfang circa 40 000 km. Zwar ist die Erde nicht perfekt rund, aber für folgende Aufgabe gehen wir mal davon aus. 😉



a) Berechnen Sie den Durchmesser der Erde. Runden Sie auf ganze Kilometer.

b) Circa ein Drittel unserer Erdoberfläche ist mit Wald bedeckt. Ein Hektar Wald speichert pro Jahr circa 10 Tonnen CO_2. Wie viel Tonnen CO_2 bindet unser Wald jährlich?

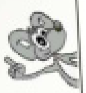
Lösungen: 12 732 km • 169 754 258 000 t

Schon gewusst? Ein Einwohner in Deutschland produziert jährlich durchschnittlich 7,9 Tonnen CO_2.

3.1 (Einfache) Exponentialgleichungen und der Logarithmus

→ Lösen einfacher Exponentialgleichungen erst im Kopf, dann durch Anwenden des Logarithmus; Gleichungen der Form $k \cdot a^x = b$
Beispielaufgaben aus früheren Abschlussprüfungen

Exponentialgleichungen sind für dich eine ganz neue Kategorie an Gleichungen: Hier steht das „x" im Exponenten!



Bisher:

- $2x + 1 = 5$
- $0{,}5x^2 - x = 22$
- $\frac{8}{x} = 4$

NEU $2^x = 32$

❶ Bestimmen Sie (hier noch ohne Logarithmus oder Taschenrechner) die Lösungsmenge. Für alle Teilaufgaben gilt: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ 7. KLASSE!

a) $2^x = 8$ L = { .... }
b) $5^x = 125$ L = { .... }
c) $17^x = 289$ ....
d) $3^x = 81$ ....
e) $2{,}77^x = 1$ ....
f) $6^x = \frac{1}{36}$ ....
g) $10^x = 0{,}0001$ ....
h) $0{,}027 = 0{,}3^x$ ....
i) $2^{10-x} = 32$ ....
j) $3^{2x} = 27$ ....

Lösungen: −4 • −2 • 0 • 1,5 • 2 • 3 • 3 • 3 • 4 • 5

❷ Verwenden Sie den Logarithmus, um die Gleichungen aus Aufgabe ❶ b) bis h) zu lösen. Beginnen Sie jede Gleichung mit x = ... Lösen Sie anschließend mit dem Taschenrechner.

a) $2^x = 8$
$x = \log_2 8$
$x = 3$

Sofern du keinen Taschenrechner mit natürlichem Display hast (wo du z. B. den Logarithmus zur Basis 2 direkt über die $\boxed{\log_\square\square}$-Taste eintippen kannst), tippe **log 8 : log 2** und dann $\boxed{=}$ bzw. $\boxed{\text{EXE}}$.

$\log_2(8)$

log 8÷log 2

b) $5^x = 125$
$x =$ ....
....

c) $17^x = 289$
....
....

d) $6^x = \frac{1}{36}$
....
....

e) $10^x = 0{,}0001$
....
....

f) $2{,}77^x = 1$
....
....

g) $3^x = 81$
....
....

h) $0{,}027 = 0{,}3^x$
....
....

wie in Aufgabe ❷

❸ Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen mithilfe des Logarithmus*). Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma (außer bei h) und i)).

a) $2^x = 3$ $x \approx$ ....
b) $16^x = 40$ $x \approx$ ....
c) $22{,}3 = 5^x$ ....
d) $813^x = 25\,000$ $x \approx$ ....
e) $8{,}13^x = 25\,000$ ....
f) $1{,}7^x = 10$ $x \approx$ ....
g) $10^x = 2$ $x \approx$ ....
h) $2^x = 0{,}0625$ ....
i) $4^x = 0{,}5$ ....
j) $9{,}9^x = 0{,}002$ ....

Lösungen: −4 • −4 • −1,5 • −2,0 • −5 • 0 • 0,30 • 1,33 • 1,21 • 1,28 • 1,93 • 2 • 3 • 3 • 4 • 4,34 • 4,83

*) Falls du einen höherwertigen Taschenrechner hast: Nutze hier nicht die SOLVE-Funktion (⇨ Menü Gleichungen), übe den Logarithmus!

❸ Und jetzt umgekehrt! Der Scheitelpunkt einer Normalparabel ist gegeben und Sie sollen die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktsform angeben. (x, y ∈ IR)

a) $S_1(3|1{,}5)$ p_1: y = (x − 3)² + 1,5

b) $S_2(-4|-3)$ p_2: $y = (x + 4)^2 - 3$

c) $S_3(-1|1)$ p_3: $y = (x + 1)^2 + 1$

d) $S_4(0|3)$ p_4: $y = (x + 0)^2 + 3 = x^2 + 3$

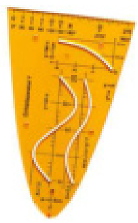
e) $S_5(-1{,}1|7)$ p_5: $y = (x + 1{,}1)^2 + 7$

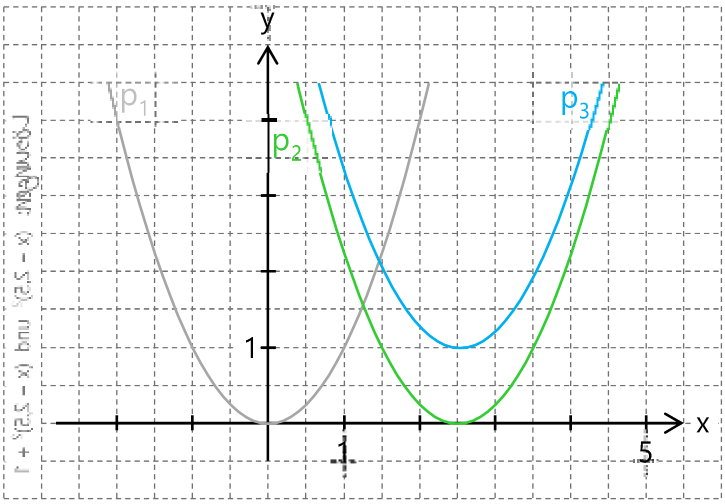
f) $S_6(8|-2)$ p_6: $y = (x - 8)^2 - 2$

g) $S_7(0|0)$ p_7: $y = (x + 0)^2 + 0 = x^2$

h) $S_8(-1{,}5|0)$ p_8: $y = (x + 1{,}5)^2 + 0 = (x + 1{,}5)^2$

❹ Zeichnen Sie die Normalparabel p_1: $y = x^2$ mit Bleistift in das vorbereitete Koordinatensystem ein (vielleicht haben Sie so eine Parabelschablone? Ansonsten hilft die kleine Wertetabelle unten). Verschieben Sie diese dann um 2,5 LE nach rechts und zeichnen Sie die neue Parabel p_2 mit grüner Farbe ein. Verschieben Sie nun p_2 um 1 LE nach oben und zeichnen Sie die neue Parabel p_3 in Blau ein.





x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = x^2$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Symmetrie nicht vergessen!

Notieren Sie die Scheitelpunkte S_2 und S_3 und geben Sie anschließend die Funktionsgleichung von p_2 und p_3 an.

$S_2(2{,}5|0)$

p_2: $y = (x - 2{,}5)^2$

$S_3(2{,}5|1)$

p_3: $y = (x - 2{,}5)^2 + 1$

Weißt du's noch? Wertetabelle mit dem Taschenrechner → siehe Homepage des Verlags! (www.voll-verlag.de → Mathe-Service)

❺ Gegeben sind Gleichungen und Scheitelpunkte von Parabeln. Geben Sie an, mit welcher Zahl die Symbole belegt werden müssen. (x, y ∈ IR)

a) p: y = (x − 5)² + 😎 S(○|3) ⇒ 😎 = 3 ⇒ ○ = 5

b) p: y = (x + 🌴)² − ♡ S(−7|2) ⇒ 🌴 = 7 ⇒ ♡ = (−2)

c) p: y = (x − 2,5)² − ½ S(🧀|🐭) ⇒ 🧀 = 2,5 ⇒ 🐭 = −0,5

d) p: y = (x + 🍔)² S(−5|🍟) ⇒ 🍔 = 5 ⇒ 🍟 = 0

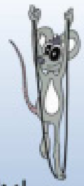
Lösungen: 5 • −2 • −0,5 • 0 • 5 • 2,5 • 7 • 3

4.2 Der Öffnungsfaktor („Formfaktor“) a

→ *Bedeutung des „Formfaktors“ bzw. Parameters a; Zuordnung einer Funktionsgleichung zu einem Funktionsgraphen; Überprüfen, ob Punkt auf Parabel liegt; Parabelfunktion zeichnen*

Der Öffnungsfaktor a gibt die Form der Parabel an.

Die Parabel ist für	Die Parabel ist für
$a > 0$ nach oben geöffnet	$\lvert a \rvert > 1$ gestreckt
$a < 0$ nach unten geöffnet	$\lvert a \rvert = 1$ Normalparabel
	$\lvert a \rvert < 1$ gestaucht



($a \neq 0$, ansonsten ist es keine Parabel)

❶ Setzen Sie in das Kästchen jeweils einen beliebigen Wert ein, allerdings so, dass sie zu den dazugehörigen Aussagen passen.

zum Beispiel:

Es gibt hier unendlich viele Lösungsmöglichkeiten. Grundsätzlich muss aber gelten:

a) Parabel ist nach oben geöffnet und gestreckt: $y = \boxed{2}\,x^2$ — $a > 1$

b) Parabel ist nach oben geöffnet und gestaucht: $y = \boxed{0{,}5}\,x^2$ — $0 < a < 1$

c) Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt: $y = \boxed{-3}\,x^2$ — $a < -1$

d) Parabel ist nach unten geöffnet und gestaucht: $y = \boxed{-0{,}7}\,x^2$ — $-1 < a < 0$

❷ Kreuzen Sie an, welche Eigenschaften auf die jeweilige Parabelfunktion zutreffen und notieren Sie in der letzten Spalte die Anzahl der Nullstellen (= Schnittpunkte mit der x-Achse).

Tipp: Überprüfe deine Lösung mithilfe deines grafikfähigen Taschenrechners! (sofern vorhanden)

	PARABELGLEICHUNG ($G = x,\ y \in \mathbb{R}$)	NACH OBEN GEÖFFNET	NACH UNTEN GEÖFFNET	GESTRECKT	GESTAUCHT	NORMALPARABEL	ANZAHL DER NULLSTELLEN
Beispiel:	p_1: $y = -2{,}5(x-3)^2 + 24$		X	X			2
	p_2: $y = 0{,}5(x+2)^2 + 22$	X			X		0
	p_3: $y = -\frac{3}{4}(x-1{,}5)^2 - 8$		X		X		0
	p_4: $y = 8x^2$ → $y = 8(x-0)^2 + 0$	X		X			1
	p_5: $y = -x^2$					X	1
	p_6: $y = 1\frac{1}{3}(x+0{,}5)^2 - 0{,}75$	X		X			2
	p_7: $y = -0{,}02(x-12)^2 + 5$		X		X		2

❸ Geben Sie eine quadratische Funktionsgleichung an, die nach unten geöffnet ist, gestreckt ist und keine Nullstelle besitzt: $y \overset{z.B.}{=} -2(x-3)^2 - 4$

Allgemein muss gelten: $a < -1$ und $y_S < 0$

Lösungen: ❶ a) $y = -0{,}07(x-10)^2 + 7$ b) Nein, keine Chance! ❷ a) 16,2 m b) Ja, max. Eintauchtiefe = (−)5,85 m

5.2 Vereinfachte Baumdiagramme und Pfadregeln

→ *Bestimmen der Wahrscheinlichkeit gewisser Ereignisse bei zusammengesetzten (mehrstufigen) Laplace-Experimenten, Anwendung der Pfadregeln*

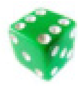
Die Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse bei (einstufigen) Laplace-Experimenten anzugeben, ist relativ leicht. Erinnerst du dich?

Wahrscheinlichkeit P (engl.: *probability*)

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Ereignis E

Beispiel:



Die Wahrscheinlichkeit,
eine Sechs zu würfeln, beträgt:

$P(6) = \frac{1}{6} = 0{,}166666... \approx 16{,}7\,\%$

(Voraussetzung: Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich, siehe S. 90.)

❶ Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln mit einem normalen (nicht gezinkten) Spielwürfel ...
a) das Ergebnis größer oder gleich 3 ist?
b) das Ergebnis eine Primzahl ist?

Gib jeweils zuerst das Ereignis E als Menge an und bestimme dann P(E) als Bruch und in Prozent (runde auf ganze Prozent).

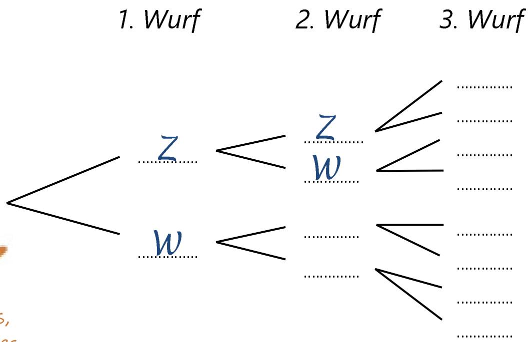
a) E = { 3; 4; .... } ⇒ P(E) = ...

b) ....

Lösungen: a) E = {3; 4; 5; 6}, P(E) = $\frac{2}{3}$ ≈ 67 %   b) E = {2; 3; 5} ⇒ P(E) = $\frac{1}{2}$ = 50 %

Interessanter wird das Ganze, wenn man zwei (oder sogar mehr) Laplace-Experimente hintereinander durchführt und dann versucht, die Wahrscheinlichkeit für gewisse Ereignisse zu bestimmen. Ein Baumdiagramm hilft dir, bei solchen mehrstufigen Zufallsversuchen den Überblick zu behalten.

❷ Sie werfen dreimal hintereinander eine Münze. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) ... das Ergebnis dreimal „Zahl" oder dreimal „Wappen" ist (also E = {Z-Z-Z, W-W-W})?
b) ... die Münze mindestens zweimal „Zahl" zeigt?



Einfaches, ungekürztes Baumdiagramm

a) E = {Z-Z-Z, W-W-W}

P(E) = 2 / ......

b)

Lösungen: a) P(E) = $\frac{1}{4}$ b) E = {Z-Z-Z, Z-Z-W, Z-W-Z, W-Z-Z} ⇒ P(E) = $\frac{1}{2}$